Du Triangle à l'Ellipse

ou comment déterminer mathématiquement l'emplacement des lignes de défense romaines à Alésia

par Jean MICHEL, Ingénieur Civil des Ponts et Chaussées

Dans le Bulletin 25 d'ALESIA (juillet 2005), on avait tenté de démontrer que parmi toutes les couronnes polygonales correspondant au retranchement des troupes romaines (entre contrevallation et circonvallation), celle basée sur une figure de triangle permettait de minimiser la distance entre les deux lignes ainsi que la surface à gérer par les romains. On constatait aussi que cette forme de couronne triangulaire théorique (mais conforme aux données de César) correspondait quasi exactement aux configurations de terrain de l'oppidum de Chaux des Crotenay.

Avec quelques rudiments de mathématiques du niveau du collège (voilà du reste un bon exercice pour de petits crânes d'œuf), on peut assez aisément démontrer :

1 – que le site du Mont d'Auxois et les affirmations officielles sur les lignes de défense romaines ne peuvent absolument pas rendre compte de la géométrie décrite simplement par César ;

2 – que le site de Chaux-Cornu-Syam et l'hypothèse Berthier collent par contre au plus près de la mathématique césarienne.

Pour autant ce raisonnement ne saurait constituer une preuve tangible de la localisation d'Alesia à Chaux... mais c'est quand même satisfaisant pour l'esprit de trouver quelques indices supplémentaires confortant la thèse Berthier.

Il est aussi intéressant de constater que deux chiffres seulement donnés par César (11.000 pas et 14.000 pas pour respectivement la contrevallation et la circonvallation) permettent de déduire beaucoup de choses, dès lors que l'on avance quelques conjectures sur la ou les formes de l'oppidum encerclé (et donc sur l'allure général du dispositif de défense romain) et dès lors qu'on utilise quelques formules mathématiques simples.

Essayons de faire la démonstration, en travaillant en plusieurs temps.

1 – Les données de départ et les hypothèses retenues

Tout d'abord les données de César :

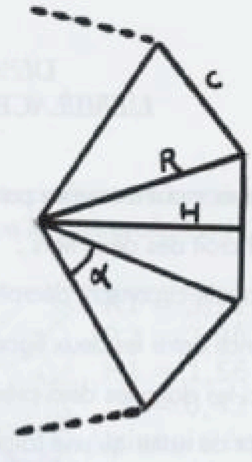
- la contrevallation : 11.000 pas, soit 16,269 km
- la circonvallation : 14.000 pas, soit 20,706 km.

On ne reviendra pas ici sur les querelles d'experts sur ces chiffres; ils semblent aujourd'hui être admis. On notera toutefois que César donne des chiffres arrondis: il va de soi que la ligne intérieure ne peut pas faire exactement 11.000 pas. La rigueur de César ne le conduit pas à concevoir son dispositif de défense selon une esthétique du chiffre rond et donc les longueurs mentionnées longueur peut sûrement varier en plus ou en moins de quelques 3, 4 ou 5%.

On fait l'hypothèse - assez légitime - que César et ses troupes encerclent les gaulois enfermés dans l'oppidum. Dès lors, on peut affirmer que les lignes de défense sont des polygones ou courbes convexes et donc que l'espace entre les deux lignes correspond à une couronne polygonale ou circulaire. Mais le nombre des côtés de ces polygones n'est pas mentionné pas César ; par contre il est admis que ces lignes suivent au plus près (s'adaptent) aux configurations du terrain. Ainsi dans le cas de Chaux, on aurait naturellement à considérer un triangle alors que dans le cas du Mont Auxois, on serait sûrement plus en face d'un ovale (ou d'une ellipse).

Enfin, pour faciliter les calculs, on considèrera que les lignes sont des polygones réguliers (ou formes régulières), même si les adaptations au terrain peuvent conduire à des allures plus complexes, notamment au niveau des détails.

2 – Du triangle au cercle : les chiffres clés des couronnes polygonales



Un polygone régulier peut être caractérisé par :

- son nombre **n** de côtés : 3, 4, 5, 6, 10, 100, 1000,...
- la longueur **c** de ses côtés
- son pas d'angle **a** correspondant à 360° divisé par **n** (a = 360/n)
- son apothème **H**, c'est à dire le segment de droite allant du centre du polygone au cercle inscrit dans le polygone (c'est encore le rayon du cercle inscrit)
- le rayon **R** du cercle circonscrit.

P étant le périmètre du polygone, on a aisément une première équation simple :

$$P = n.c$$

Si on connaît le périmètre (cf. données de César), on peut alors faire des simulations sur **n** et sur **c**. Il est aisé aussi de calculer la surface **S** constituée de **n** triangles isocèles :

$$S = n.H.C/2 \quad \text{ou encore} \quad S = P.H/2$$

Allons plus loin et essayons de déterminer **H** et **R**, ce qui permettra de dessiner ou placer aisément une forme sur une carte IGN. Avec un petit travail mathématique, on obtient l'équation suivante qui permet de calculer **H** :

$$P = 2n.H.tg\,(180/n)$$

et dans la foulée, on peut déterminer **R** grâce à la formule :

$$R = (P/2n).[1/\sin\,(180/n)]$$

ou encore

$$H = R.\cos(180/n)$$

Dans le cas de la couronne polygonale, on se trouve en présence de deux polygones homothétiques dont l'un contient l'autre. Le périmètre du plus petit **P1 ou Pint** est bien sûr inférieur à **P2 ou Pext**, le périmètre du plus grand. La différence **d** entre H2 et H1 les deux apothèmes de ces polygones peut être calculée par la formule suivante :

$$d.tg(180/n) = (P2-P1)/2n$$

Alors maintenant appliquons cela à quelques cas simples ... ou complexes avec les deux chiffres clés de César (P1=16,27 km P2=20,71 km)

en km

Polygone	**n**	**H1**	**H2**	**R1**	**R2**	**d**
Triangle	3	1,56	1,99	3,12	3,98	0,43
Carré	4	2,03	2,58	2,88	3,66	0,55
Pentagone	5	2,25	2,86	2,78	3,53	0,61
Hexagone	6	2,34	2,98	2,71	3,44	0,64
Décagone	10	2,51	3,19	2,63	3,35	0,68
-	100	2,59	3,29	2,59	3,29	0,71
-	1000	2,59	3,29	2,59	3,29	0,71
Cercle	infini	2,59	3,30	2,59	3,30	0,71

DU TRIANGLE À L'ELLIPSE

OU COMMENT DÉTERMINER MATHÉMATIQUEMENT L'EMPLACEMENT DES LIGNES DE DÉFENSE ROMAINES À ALESIA

Ces résultats nous montrent qu'en passant du triangle au cercle (nombre infini de côtés) :

- l'apothème **H** croît des deux tiers ;
- le rayon du cercle circonscrit décroît de 17 %
- enfin la distance entre les deux lignes (contravallation-circonvallation) croît de 0,43 km à 0,71 km, soit près des deux tiers.

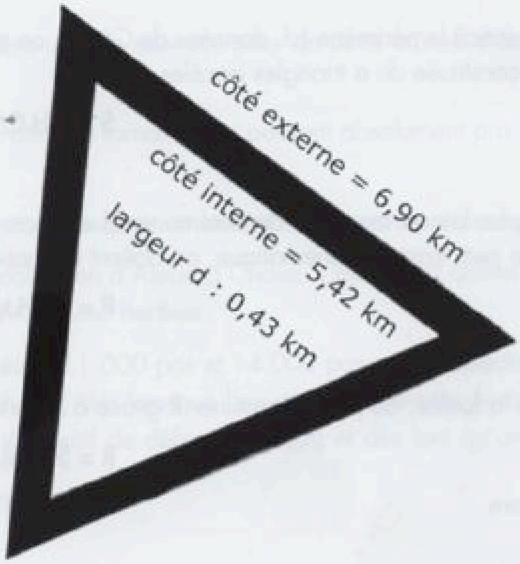
On retrouve ici les données déjà présentés l'article du Bulletin 25 d'ALESIA.

Il est intéressant de noter qu'une faible distance entre les deux lignes romaines (430 mètres dans le cas du triangle) permet à l'évidence de moins disperser les forces comparativement à une organisation sur une couronne circulaire.

Etablissons maintenant un tableau similaire pour les aires des polygones intérieur **(Sint)** et extérieur **(Sext)** ainsi que l'aire de la couronne polygonale **(Sdiff)**.

en hectares

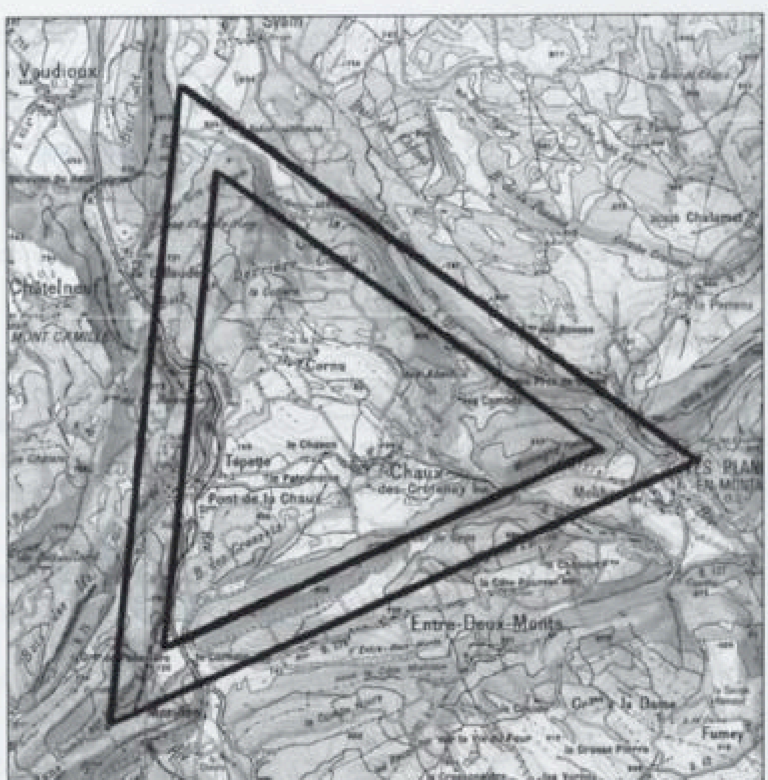
Polygone	n	Sint	Sext	Sdiff
Triangle	3	1269	2061	792
Carré	4	1651	2671	1020
Pentagone	5	1830	2961	1131
Hexagone	6	1903	3085	1182
Décagone	10	2042	3303	1261
-	100	2107	3406	1299
-	1000	2109	3410	1301
Cercle	infini	2110	3416	1306



On constate qu'à périmètre constant, plus le polygone s'arrondit (augmentation du nombre de côtés), plus sa surface augmente : ainsi la surface du cercle (nombre infini de côtés) équivaut aux 5/3 de la surface du triangle. On constate de même que la surface de la couronne polygonale, elle aussi augmente dans la même proportion.

3 – L'application au terrain : Chaux des Crotenay et son triangle idéal

Il est vite tentant de reporter sur une carte la figure de la couronne triangulaire (triangle équilatéral en première approximation) en se calant sur les données césariennes. Amusons nous à découper cette couronne et la faire glisser sur la carte IGN au 25.000ème.

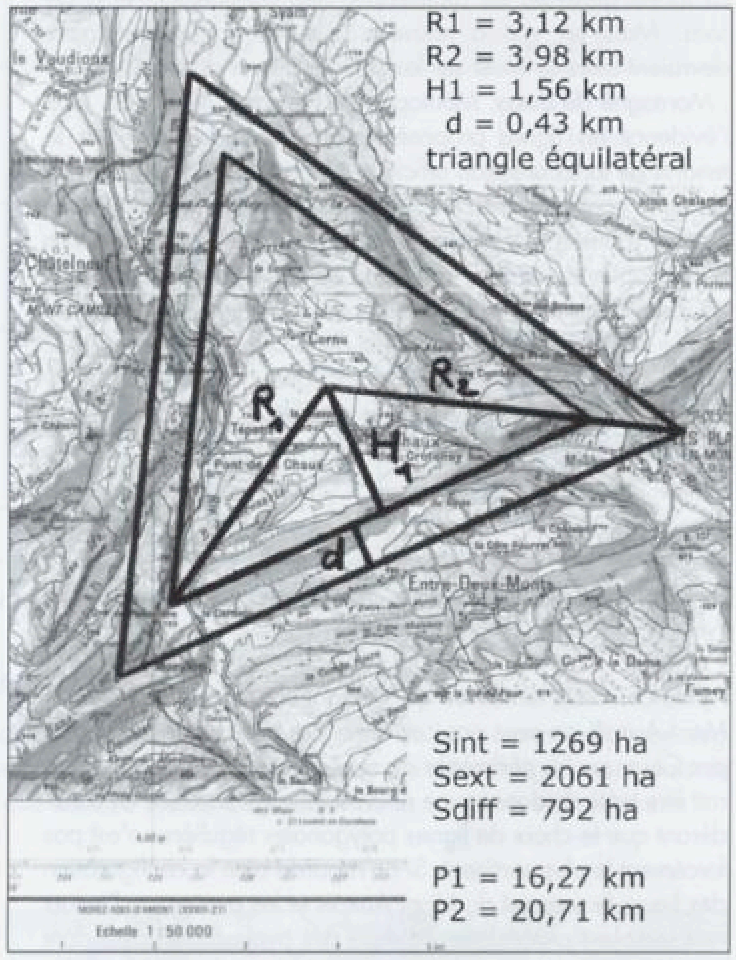


Le résultat est immédiatement stupéfiant. La coïncidence avec les lignes du terrain est quasiment parfaite. Et, en outre le centre des triangles semble, presque miraculeusement se trouver au cœur de la ville sacrée (sans commentaires sur la symbolique de la chose, restons en aux seules mathématiques!...).

Du Triangle à l'Ellipse

ou comment déterminer mathématiquement l'emplacement des lignes de défense romaines à Alesia

Cette configuration triangulaire de Chaux des Crotenay conduit aux chiffres figurant sur la carte ci-dessous. On voit que les romains disposent d'une surface minimisée de 792 hectares entre les deux lignes de défense, alors que la contrevallation (1269 ha) encercle d'assez près un oppidum de dimension assez proche.



Il faut à nouveau redire ici que ce triangle équilatéral, parfait, ne prend pas en compte les variations ou adaptations locales, mais la distance entre la théorie et le terrain n'est pas vraiment importante.

On voit aussi sur cette carte que la ville sacrée mandubienne correspond presque au cercle inscrit dans le petit triangle (avec son centre idéalement placé) alors que les pointes des triangles, nettement plus éloignées, sont manifestement à des emplacements stratégiques avec des particularités de terrain bien précises (l'arx au nord – les Gyps de Syam -, le triangle de Montliboz et le pied de la Montagne Ronde, le pied du Rachet et la zone d'accès de Morillon).

On aurait bien sûr pu faire le même exercice avec un carré, avec un hexagone ou avec un cercle, mais l'indication selon laquelle César décide de construire ses lignes de défense au plus près des particularités du terrain nous conduit assez logiquement au choix du triangle. Et comme pour Cendrillon, la chaussure théorique – magique – de la couronne triangulaire sied parfaitement au pied – concret – de l'oppidum de Chaux des Crotenay.

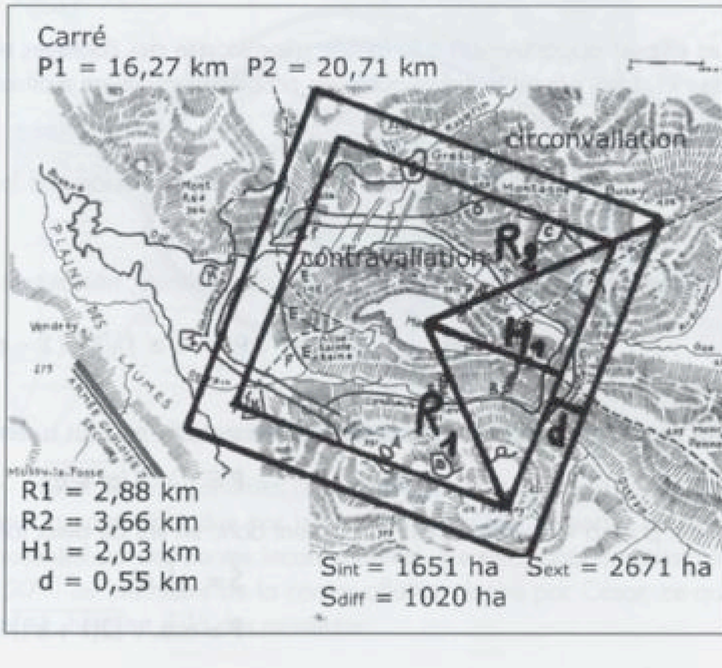
4 – L'application de l'hypothèse des polygones réguliers au Mont Auxois

Faisons la même démarche avec Alise et le Mont Auxois.

On éliminera assez vite la figure du triangle qui n'a pas de sens dans le contexte du Mont Auxois caractérisé plutôt par une forme en amande

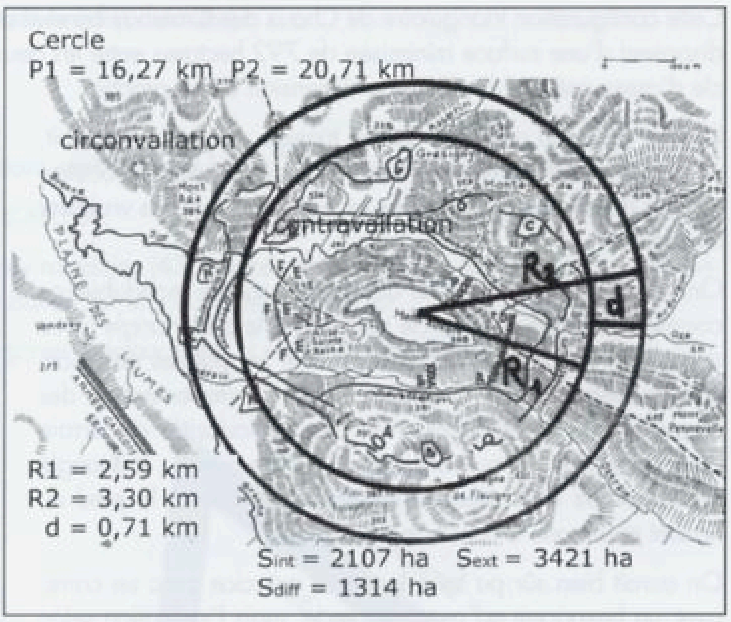
Le polygone qui vient immédiatement après le triangle est le carré. On le disposera de façon à avoir deux côtés parallèles à l'orientation générale sud-est – nord-ouest du plateau et de la zone environnante.

Cette forme ne semble pas vraiment adaptée au terrain, c'est évident, mais elle minimise la surface de la couronne polygonale ainsi que la distance entre les deux lignes. On constate très vite que la ligne de la contrevallation devrait pour l'essentiel se trouver sur les sommets des buttes entourant le Mont Auxois, laissant les gaulois occuper le bas des vallées de l'Oze et de l'Ozerain.



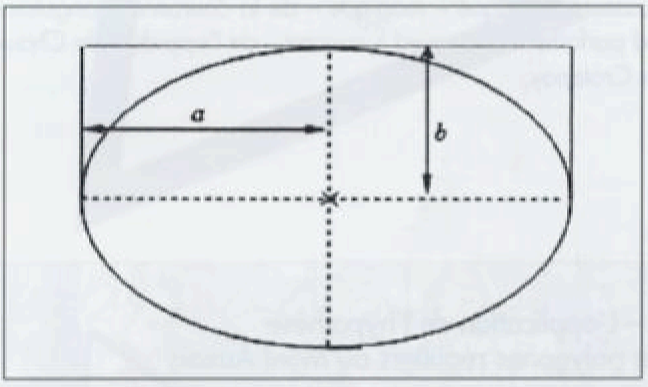
Prenons maintenant le polygone extrême que constitue le cercle, en le centrant sur le cœur du Mont Auxois.

La forme générale est maintenant plus satisfaisante et a du sens. Mais on voit à nouveau que les lignes théoriques devraient alors se situer sur les collines autour du Mont Auxois : Montagne de Bussy, Montagne de Flavigny, Mont Réa. Et à l'évidence les lignes proposées par Napoléon III et par le tenants de la localisation officielle sont très à l'intérieur du cercle de la contrevallation théorique (sauf le petit bout de la plaine des Laumes). Notons enfin qu'avec cette forme circulaire plus adaptée au terrain, la surface de la couronne à gérer par les romains est environ 30% supérieure à celle de la couronne carrée, et 65% supérieure à celle de la couronne triangulaire. Quant à la distance entre les deux lignes, elle dépasse 700 mètres, ce qui ne va pas dans le sens de la compacité efficace du dispositif d'encerclement.



5 – L'ellipse appliquée aux données césariennes

Après ces deux tentatives qui démontrent bien que le site du Mont Auxois ne peut pas correspondre aux données fournies par César sur les périmètres de ses lignes de défense, on pourrait être tenté de donner une nouvelle chance à ce site en considérant que le choix de lignes polygonales régulières n'est pas forcément le plus pertinent. Si on regarde bien la configuration des lieux, le sommet du Mont Auxois et les pentes qui l'entourent semblent plutôt s'inscrire dans des ovales ou ellipses dont le ratio d'aplatissement (rapport du petit axe **b** au grand axe **a**) tournerait entre 50 et 70%.



Les ellipses appartiennent à la famille géométrique des coniques et sont dotées de particularités intéressantes qu'on ne développera pas ici. Elles posent toutefois quelques problèmes au jeune mathématicien de collège notamment pour le calcul de leur périmètre.

La surface **S** de l'ellipse est assez aisée à déterminer, selon une formule qui s'apparente à celle de la surface du cercle :

$$S = \pi . a . b$$

La détermination du périmètre **P** est bien plus délicate, nécessitant de passer par un peu de calcul intégral :

$$P = 4\ a \int_0^{\pi/2} (1 - e^2 \sin^2 \theta)^{1/2}\, d\theta$$

Par chance, une valeur approchée de cette surface est plus aisément calculable :

$$P \cong \pi \sqrt{2\,(a^2 + b^2)}$$

Si on pose b = ka (avec k<1), on obtient donc un jeu de deux formules simples :

$$S = \pi . k . a^2$$

$$P = \pi . a . \sqrt{[2(1 + k^2)]}$$

Du Triangle à l'Ellipse

ou comment déterminer mathématiquement l'emplacement des lignes de défense romaines à Alesia

Si donc on connaît P (données de César) et si on simule plusieurs cas d'ellipses selon k variant de 0,5 à 0,7, on aboutit à des tableaux de données intéressants.

	k = 0,5	k = 0,6	k = 0,7
Pint = 16,269 km	a = 3,27 km b = 1,64 km Sint = 1685 ha	a = 3,14 km b = 1,88 km Sint = 1855 ha	a = 3,00 km b = 2,10 km Sint = 1979 ha
Pext = 20,706 km	a = 4,17 km b = 2,09 km Sext = 2738 ha	a = 4,00 km b = 2,40 km Sext = 3016 ha	a = 3,82 km b = 2,67 km Sext = 3204 ha
Surface de la couronne elliptique	Sdiff = 1053 ha	Sdiff = 1161 ha	Sdiff = 1225 ha
Distances entre lignes	d^*a = 0,90 km d^*b = 0,45 km d^{**} = 0,74 km	d^*a = 0,86 km d^*b = 0,52 km d^{**} = 0,72 km	d^*a = 0,82 km d^*b = 0,57 km d^{**} = 0,71 km

La distance entre les lignes de défense varie continûment en passant du grand axe **(d^*a)** au petit axe **(d^*b)**. Un calcul mathématique permet de déterminer une valeur moyenne **(d^{**})** donnée par une équation du second degré :

$$\mathbf{d^2 + a.d.(1+k) - [(Pext^2 - Pint^2)/4.\ \pi^2] = 0}$$

On constate, qu'à périmètre constant, plus l'ellipse s'arrondit, plus sa surface augmente. La surface de la couronne elliptique augmente également dans le même sens. Quant à la distance moyenne **(d^{**} calculée)** entre les lignes, elle décroît légèrement mais de façon générale tourne autour de 720 mètres, soit nettement plus que les 430 mètres d'épaisseur de la couronne triangulaire.

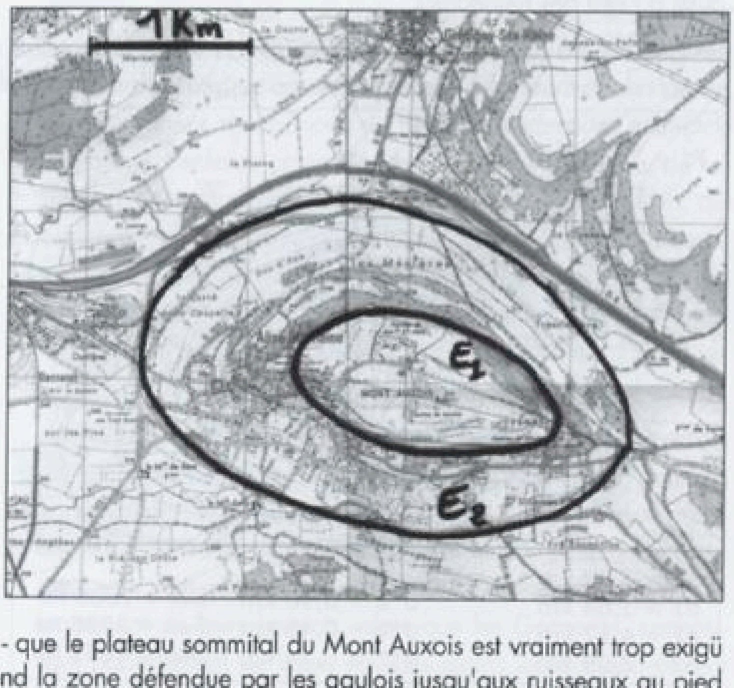
6 – Les ellipses naturelles alisiennes

Examinons maintenant la situation sur le terrain du Mont Auxois.

Deux ellipses E1 et E2 apparaissent très nettement sur la carte IGN au 25.000ème:

- E1 correspond au sommet du plateau du Mont Auxois;
- E2 enserre totalement le Mont avec ses pentes et cela jusqu'au niveau de l'Oze et de l'Ozerain.

	E1	E2
Demi grand axe a	0,875 km	1,500 km
Demi petit axe b	0,425 km	0,950 km
Ratio k = b/a	0,49	0,63
Périmètre	4,33 km	7,89 km
Surface	117 ha	448 ha

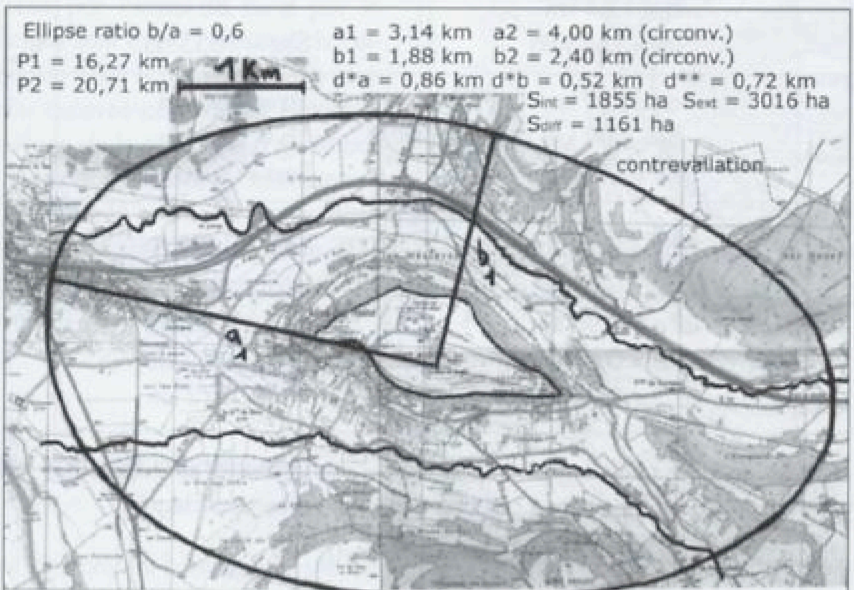


On ne reviendra pas ici sur le fait – largement connu et débattu - que le plateau sommital du Mont Auxois est vraiment trop exigü pour accueillir les troupes gauloises et les Mandubiens. Si on étend la zone défendue par les gaulois jusqu'aux ruisseaux au pied du Mont, (ce qui permet d'accueillir plus de troupes mais pour l'essentiel sur des pentes inconfortables), il est frappant de constater que le périmètre de l'ellipse est très largement inférieur (près de 50%) au périmètre de la contrevallation donné par César, ce qui veut donc dire que ces lignes césariennes sont à chercher, à coup sûr, bien au delà des ruisseaux.

7 – Les ellipses souhaitables selon les données de César

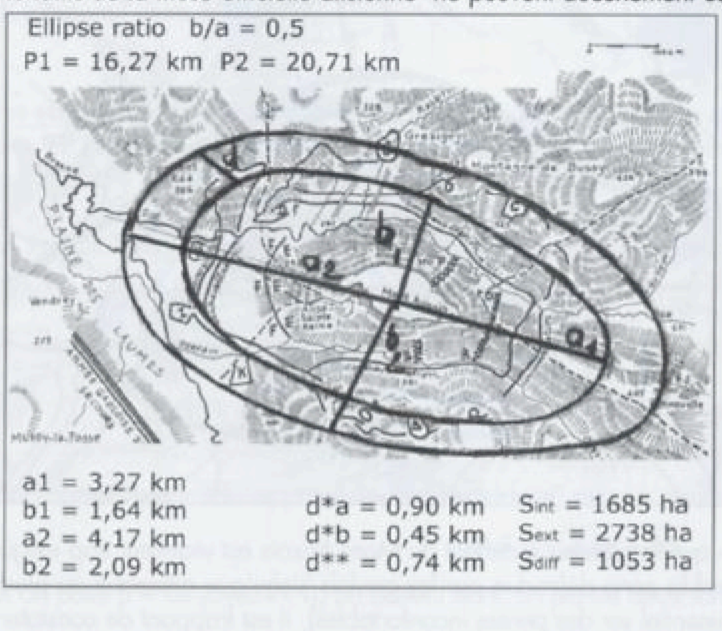
Partons donc des données de César et regardons comment les ellipses calculées vont se placer sur la carte.

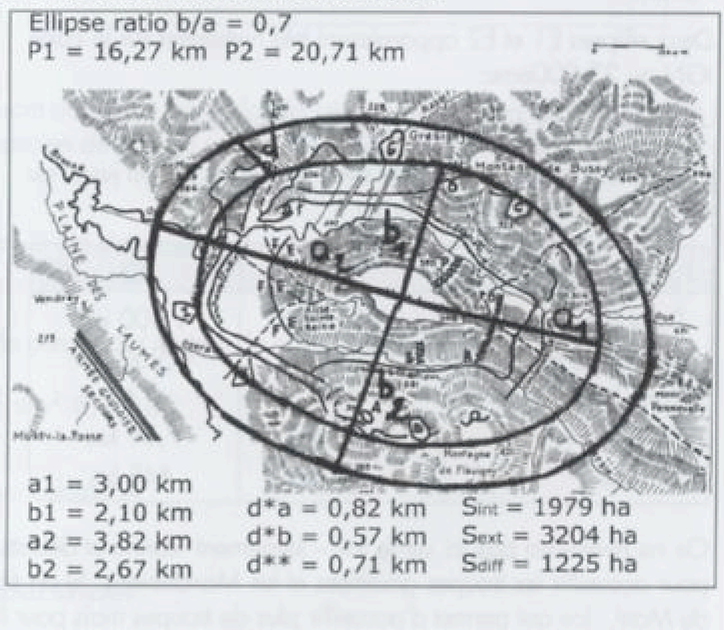
Une première tentative avec un ratio d'aplatissement de 60% (le plus proche finalement de celui de l'ellipse naturelle E2) conduit au dessin suivant :



On voit très nettement que la seule ligne de contrevallation doit se trouver au moins au niveau des buttes ou collines périphériques au Mont Auxois (la ligne de circonvallation elle-même est reportée d'environ 700 mètres en arrière) ce qui ne manque pas de laisser perplexe puisque les gaulois assiégés disposent généreusement (merci César) de tout l'espace au pied des collines et ont accès aussi à l'eau des ruisseaux.

Les deux cas d'ellipses avec k=0,5 et 0,7 donnent des résultats quasi identiques et prouvent à nouveau que les affirmations des tenants de la thèse officielle alisienne ne peuvent aucunement coller avec les données chiffrées de César.





A ce point d'aboutissement de la réflexion, on ne peut qu'espérer que les preuves de terrain sur le site de Chaux-des-Crotenay/Cornu/Syam viennent vite corroborer les résultats de la démonstration mathématique.